Understanding Geometric Proofs and Demonstrations -A Study about Conic Sections with the Aid of Geogebra Software Compreendendo Provas E Demonstrações Geométricas -Um Estudo Acerca Das Seções Cônicas Com Auxílio Do Software Geogebra

Sabrina Alves Boldrini Cabral

Received: 6 February 2021 Accepted: 28 February 2021 Published: 15 March 2021

Abstract

The present work has as presupposition the consideration that the teaching of Proofs and Demonstrations, starting from experimental activities, can lead the student to develop a higher level of Geometric understanding. The empirical data that allowed the construction of this assumption comes from a research conducted by Cabral (2017) with students of the 3rd period of the Degree in Mathematics. Considering the complexity of teaching and learning geometric proofs and demonstrations, not only for the student but also for the teacher, the activity described here: Discovering the properties of the Conics with GeoGebra, was developed in the sense of proposing teaching situations that lead to the student to: observe, experiment, reflect, conjecture and refute. The data obtained were analyzed according to the test model proposed by Balacheff (2000). We present in this article some data resulting from the application of this activity in the classroom followed by some related reflections.

Index terms— geometric properties. conical curves. experimental evidence.

1 I.

Introdução tualmente existe uma grande necessidade de integrar aspectos relativos ao uso da Tecnologia nas atividades de cunho Educativas, especialmente no que diz respeito ao ensinoaprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. A utilização das tecnologias no ambiente educativo beneficia a prática pedagógica docente assim como proporciona ao aluno um ensino mais diversificado e atraente.

As Diretrizes Curriculares Nacionais, para os Cursos de Licenciatura em Matemática, afirmam que: "os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica" (Brasil, 2001, p. 13) e entre as características que se esperam que os licenciados em Matemática apresentem, destaca-se a visão da contribuição que a aprendizagem Matemática pode oferecer na formação de indivíduos para o exercício de sua cidadania.

De modo geral, grande parte dos alunos egressos nos cursos de Licenciatura de Matemática ao chegarem a Universidade, já passaram por um longo processo de desenvolvimento do raciocínio lógico durante todo o Ensino Básico, no qual construiu para si a imagem de diversos conceitos matemáticos. Porém, as habilidades matemáticas são formados apenas quando a ação interiorizada do aluno atribui significado às formulações que enunciam. Nesse sentido, torna-se imprescindível durante todo o processo de formação desses profissionais, mobilizar elementos que possam contribuir para uma (re) significação desses conceitos. Dessa forma, a tecnologia e os softwares educacionais, desenvolvidos para o ensino de matemática surgem como fonte propulsora nesse processo de atribuir novos significados àquilo que já foi validado.

Na concepção de que (re) aprender matemática na Licenciatura é uma possibilidade para o desenvolvimento potencial e reflexivo dos futuros professores que, o experimento "Descobrindo propriedades das Cônicas com o

GEOGEBRA" foi aplicado a uma turma do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática. Adaptado do "Caderno de Atividades de Geometria Analítica: aulas práticas no laboratório de computação" (MIRANDA e LAUDARES, 2011, p. [10][11][12] o experimento foi construído com base nas atividades de construção e análise do comportamento gráfico das cônicas.

A atividade aqui descrita, segue uma sequência didática em que, após cada construção feita, os alunos são levados a argumentar sobre o comportamento observado no gráfico construído. A fim de que pudéssemos compreender, segundo modelo proposto por **??**alacheff (2000), o nível de prova encontrado nos argumentos produzidos por esses discentes, bem como, analisar quais as contribuições que esse processo mediado pelo uso da tecnologia pode oferecer para a (re) significação de conhecimentos matemáticos, a atividade proposta foi desenvolvida a partir de processos de ensino previamente planejados.

2 II. Atividade de Prova e Demonstração Geométrica

No processo de construção do saber matemático, sustentar uma aprendizagem significativa implica em uma postura pedagógica capaz de considerar que um fato matemático está relacionado à capacidade de utilizar diferentes formas de linguagens e que, para aprender significados, transformá-los e combiná-los de forma a construir novas aprendizagens, é preciso que o professor configure diferentes formas de expressões e questionamentos sobre os mesmos significados.

De acordo com Hanna (2000), quando analisado como os alunos se comportam diante de uma situação-problema e como fazem para validar seus resultados, percebe-se que estes não possuem experiências de pensamentos que envolvam construções cognitivas complexas. Pesquisas realizadas por Cabral (2017) com 23 alunos do 3º ano do Ensino Médio, apontam que, quando submetidos a um processo de prova, os alunos, na maioria das vezes, recorrem a as definições apresentadas no livro didático ou explicações dadas pelo professor, ou seja, as operações ou os conceitos desenvolvidos por eles são ações que nem sempre utilizam diferenciações ou articulações referentes ao que se pretende provar. De acordo com Nasser e Tinoco (2003), a capacidade do aluno de justificar uma afirmativa está ligada à formação dos conceitos, a recorrência a um argumento de autoridade pode indicar a falta de compreensão do que foi proposto.

Compreender um processo de prova é compreender que o fato de uma afirmação ser verdadeira está relacionado com a consistência da argumentação utilizada nesse processo. Ao considerarem a prova um meio de comunicação de ideias matemáticas que envolvem todo um processo de buscar regularidades, propor conjecturas e pensar logicamente, os alunos alcançam novas dimensões na estruturação desse saber.

Para **??**alacheff (2000), as provas e demonstrações matemáticas não devem ser tratadas apenas como um fim, em si mesmas; mas devem desempenhar o papel de mediação entre o conhecimento (em seu sentido pleno) e o meio para o desenvolvimento de competências que tornem a aprendizagem significativa. Para Lakatos (1978) os alunos devem aprendê-las como um conhecimento social: os significados aprendidos não devem ser eficientes apenas na resolução de problemas propostos pela escola, mas devem também ser coerentes com os resultados socialmente reconhecidos.

Nessa perspectiva entende-se que aprender matemática consiste em perceber quais são suas questões, o que ela propõe a respeito de mundo, seus métodos, teorias e como ela é capaz de ajudar o ser humano a se compreender mais e a compreender melhor o meio em que vive.

3 a) Software Geogebra e as Atividades de Prova

Experimental O GeoGebra é um software aritmético e geométrico interativo, que foi idealizado em 2001 por Markus Hohenwarte, sendo disponibilizado para baixar e acessar gratuitamente. Este recurso apresenta os conteúdos matemáticos de forma experimental. Ao utilizar essa ferramenta de ensino, o professor desenvolve em seus alunos as capacidades de explorar, descobrir, visualizar e verificar conceitos, fórmulas e equações.

Dentre os diversos softwares matemáticos, o GeoGebra tem grande contribuição para a aprendizagem de propriedades geométricas, de acordo com Fischbein (1993), os objetos geométricos possuem duas componentes: uma é o conceito e a outra é a imagem. Nesse sentido, para o pesquisador, ao ensinar geometria deve-se, primeiramente, percorrer a fase da experimentação, para depois seguir para a abstração. O equilíbrio entre essas duas componentes, poderá propiciar a aprendizagem Geométrica Para Gravina (1996), o uso de softwares com recurso de 'desenhos em movimentos' podem ser ferramentas ideais na superação das dificuldades encontradas pelos alunos na compreensão dos conceitos geométricos, principalmente os relacionados as demonstrações. Segundo Nascimento, "o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si" (NASCIMENTO, 2012, p. 04).

Dentro do contexto de ensino-aprendizagem é evidente que os recursos tecnológicos possuem enormes contribuições para a Educação, colaborando para que o processo educativo se torne cada vez mais dinâmico. Os computadores, cada vez mais presentes na sociedade, se tornaram meios importantes para a modernização do ensino, permitindo e facilitando a aprendizagem através de recursos como os softwares educacionais.

A utilização do GeoGebra como recurso didático no ensino da geometria constitui um caminho que o professor pode seguir na perspectiva de chegar a uma maior satisfação em relação a aprendizagem e, por conseguinte o uso dessa aprendizagem no contexto de sua vida.

Construir modelos de objetos, com base na investigação e experimentação são, de acordo com Imri Lakatos (1978), características de uma visão construtivista, que considera como ciência a utilização de modelos explicativos para inferir dados da realidade e não uma representação da própria realidade. Com esses modelos, não se espera apresentar uma verdade absoluta e, sim, uma verdade aproximada que pode ser corrigida, modificada, abandonada por uma mais adequada aos fenômenos.

Desenvolver a capacidade investigativa e a construção do conhecimento científico com base na experimentação, compõe um dos principais objetivos para o ensino-aprendizagem de matemática de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997). A utilização de atividades de demonstrações experimentais em sala de aula, de acordo com Gaspar (2005) "[..] podem proporcionar situações específicas e momentos de aprendizagem que dificilmente aparecem em aulas tradicionais" (GASPAR, 2005, p.230).

A atividade de prova experimental em sala de aula, acrescenta ao pensamento do aluno, elementos da realidade e da experiência pessoal, que segundo Vygotsky (1998) podem preencher uma lacuna cognitiva característica dos conceitos científicos e dar a esses conceitos uma (re) significação. O impacto que essas atividades provocam na construção do conhecimento do aluno, tanto do ponto de vista cognitivo quanto da aprendizagem de conceitos, confirmam que a experimentação pode ser pedagogicamente válida e significativa.

4 b) Prova Geométrica: Modelo Proposto por Balacheff (2000)

Considerando que a admissão de diferentes níveis de argumentação exige uma reconsideração dos critérios de julgamento acerca da validade formal da prova, que o nível de aprendizagem do aluno e de exigência quanto ao valor do argumento por ele produzido devem estar relacionadas ao tipo de habilidade que se deseja construir os estudos realizados por **??**alacheff (2000) trazem uma noção de prova sobre o ponto de vista da Matemática praticada pelos alunos.

Em suas pesquisas, Balacheff, utiliza uma abordagem experimental da análise dos processos de prova utilizados por alunos da Educação Básica, verificando como eles comportam-se diante da solução de um problema e como fazem para validar seus resultados. Nesse processo, Balacheff identifica dois tipos básicos de provas, denominados de: "Prova Pragmática" e "Prova Conceitual".

Segundo **??**alacheff (2000), uma Prova Pragmática é aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado chamados pelo autor de "Recursos de Ação", ou seja, sem formalismo lógico, apresentados por meio de exemplo.

Uma Prova Conceitual, caracteriza-se, de acordo com **??**alacheff (2000), por formulações de propriedades e conexões existentes entre elas. As demonstrações matemáticas são exemplos desse tipo de prova, ou seja, não recorrem aos recursos utilizados pelas Provas Pragmáticas no momento de formular propriedades e possíveis relações entre elas e um determinado objeto.

Entre os vários tipos de provas conceituais e pragmáticas, **??**alacheff (2000), aponta para quatro tipos principais que possuem uma posição privilegiada no desenvolvimento cognitivo do aluno: o empirismo ingênuo, o experimento crucial, o exemplo genérico e a experiência de pensamento.

? Empirismo Ingênuo: Consiste em chegar a um resultado verdadeiro através da verificação de vários casos. Estes são muito rudimentares e também são insuficientes meios de prova.

? Experimento Crucial: A expressão experimento crucial refere-se a um experimento que permite que uma escolha seja feita entre duas hipóteses, considerando que o resultado obtido deve ser considerado diferente em uma ou outra hipótese.

? Exemplo Genérico: O exemplo genérico envolve fazer explícitas as razões para a verdade de uma proposição por meio de operações ou transformações feitas em um objeto, ou seja, parte da análise de uma propriedade particular para se chegar a uma propriedade geral.

? Experiência de Pensamento: Envolve a ação internalizada destacando-se de uma forma particular de representação. Isso ocorre por meio de um desenvolvimento narrativo temporal, onde as operações e fundamentações das provas percorrem um outro caminho, ou seja, exige uma maior maturidade matemática.
? Objetivos: Desenvolver nos discentes as capacidades de reconhecer uma cônica, seus elementos e demonstrar algumas de suas propriedades a partir de suas representações gráficas.

? Organização da Turma: Dividir os alunos em duplas ou individualmente, conforme a capacidade do laboratório de informática.

? Procedimentos: Inicialmente faz-se uma breve explanação sobre as funções de cada ferramenta do software GEOGEBRA. Na sequência, propõemse a realização das atividade de construção e análise do comportamento gráfico das Cônicas construídas no desenvolvimento do experimento. Na etapa seguinte, faz-se uma socialização das ideias abordadas no experimento.

5 b) Aplicação e Resultados Obtidos

Como já sinalizado, a atividade aqui descrita foi realizada com um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática no ano. Os recortes que apresentaremos a partir de agora são uma síntese dos resultados obtidos na atividade desenvolvida. Optamos por realizar algumas transcrições das falas e de alguns pontos que julgamos caracterizadores do processo desencadeado durante os experimentos. Os registros escritos dos alunos foram analisados com intuito de descortinar a relação entre a compreensão expressa pela fala e a escrita usada para representar tal compreensão.

A fim de que pudéssemos compreender o nível de prova encontrado nos argumentos construídos e quais as contribuições que esse processo mediado pelo uso da tecnologia poderia oferecer para a aquisição do conhecimento matemático, para cada etapa do experimento propúnhamos aos alunos que fizessem um registro das principais caraterísticas observadas durante o processo de construção. Ao final do experimento recolhemos todo material produzido.

Com objetivo principal de analisar o comportamento desses alunos diante de uma situação de ”prova” matemática, aplicamos o experimento no segundo semestre do ano letivo de 2016, quando estávamos trabalhando com a turma a disciplina obrigatória de Geometria Analítica II.

Planejamos desenvolver o experimento no laboratório de informática da Universidade. Assim, na semana anterior da realização do experimento, pedimos ao técnico responsável pelo laboratório que instalasse o software GEOGEBRA nos computadores que iríamos utilizar.

No dia proposto para aplicação do experimento, como alguns alunos da turma manifestaram ter muita dificuldade em utilizar o computador, optamos por realizar a atividade em duplas (seis duplas). Como a maioria não conhecia o software GEOGEBRA, buscamos inicialmente, explorar algumas de suas ferramentas propondo duas atividades básicas de construção de cônicas, encontradas no Caderno de Atividades de Geometria Analítica: uma relacionada ao ”traçado de cônicas” desconhecendo suas equações e outra de ”construção de cônicas” a partir de alguns pontos dados .

Observamos que nessa primeira etapa os alunos que tinham mais facilidade em utilizar o computador procuraram incentivar seu parceiro a manuseá-lo para realizar a atividade proposta.

Nesse momento, chamou-nos muita atenção uma aluna, que dizia ser atendente em uma farmácia e que estava muito preocupa, pois iria ser dispensada de seu trabalho por ”não saber trabalhar com o computador”. Percebemos então, o quão é importante a Licenciatura não atrelar-se apenas ao ensino de fórmulas, leis e teorias, pois os espaços sociais atuais exigem das pessoas uma questão mais ampla. Entendemos que estratégias de ensino como essas não podem ser excluídas da formação de docentes, uma vez que esses futuros professores irão se deparar com alunos que utilizam frequentemente esse e outros tipos de tecnologias. Após essa socialização com material tecnológico, prosseguimos o experimento propondo a realização de uma atividade de traçado de cônicas conhecendo-se as suas equações.

6 Atividade 01

Digitar a dupla de equações num mesmo sistema de eixos. Analisar os gráficos e identificar suas principais características. Em seguida digite as duplas de equações: analise seus gráficos e identifique suas principais características. (Adaptado da atividade 03 ”Caderno de Atividades de Geometria Analítica”, Miranda e Laudares, 2011, p. 10) Nosso objetivo nessa etapa do experimento foi analisar quais características conceituais das cônicas seriam evocadas e quais significados elas trariam para os alunos a partir de suas visualizações gráficas. Como os alunos não haviam recebido nenhuma sistematização do assunto abordado, esperávamos que os mesmos fossem capazes de reconhecer a partir da construção feita, algumas propriedades já conhecidas dessas cônicas.

Procuramos não intervir nesse processo de construção. Apenas respondemos às dúvidas relacionadas ao uso das ferramentas do software. A figura 01 mostra os gráficos obtidos, com o auxílio do GEOGEBRA, a partir das equações dadas na primeira etapa do experimento.

Fonte: elaborado pela autora Figura 1: Gráficos obtidos com o auxílio do software GEOGEBRA Notamos nessa etapa do experimento, que de maneira geral alunos limitaram-se apenas em identificar os tipos de cônicas e os eixos correspondentes a elas, embora esperássemos possíveis manifestações de expressões conceituais relacionadas às suas propriedades.

”As duas primeiras equações são de uma elipse, sendo que uma tem eixo maior na horizontal e eixo menor na vertical e a outra é o contrário dessa. As outras equações são de hipérboles”. (Análise apresentada por todas as duplas de estudantes).

7 Para

Gazire (2000), esse tipo de comportamento está relacionado ao fato do aluno está acostumado com um modelo de aula de ”transmissão e recepção de conhecimento no qual quem raciocina e quem faz é o professor não o aluno” (GAZIRE, 2000, p.184).

Percebemos ser fundamental uma mudança na abordagem feita pelo professor em sala de aula, pois além da intencionalidade do planejamento mais adequado a ser utilizado ele precisa ter uma postura que favoreça a mobilização do aluno para a aprendizagem. Faz-se necessário criar um ambiente em que a aprendizagem matemática rompa com o paradigma da resolução de ”listas e mais listas de exercícios”.

Na etapa seguinte propusemos aos alunos uma atividade de reconhecimento de ”famílias de cônicas”.

8 Atividade 02

Declare dois parâmetros ”a” e ”b”, crie um cursor para os mesmos; digite as equações e varie o valor de ”a” e ”b” separadamente pelo cursor. Faça uma análise das alterações obtidas e justifique sua resposta. (Adaptado da atividade 04 ”Caderno de Atividades de Geometria Analítica”, Miranda e Laudares, 2011, p. 11).

O objetivo dessa etapa foi analisar quais definições conceituais seriam evocadas e qual nível de compreensão matemático seria alcançado pelos alunos durante a realização da atividade proposta. Mas uma vez esperávamos que os alunos fossem capazes de expressar em palavras ou através de formulações matemáticas algumas propriedades das cônicas obtidas dessas equações.

Ao fazermos a análise dessa etapa, procuramos evidenciar a qualidade de comunicação matemática nos argumentos construídos. Assim, notamos, mais uma vez, que metade dos alunos buscou apenas descrever o movimento feito pelas hipérboles durante as alterações dos parâmetros ”a” e ”b”. Segundo **??**alacheff (2000), para que o aluno alcance um nível de prova conceitual, o mesmo deve ”distanciar-se da ação e aproximar-se dos processos de solução do problema”. A elaboração dessa linguagem funcional, para o pesquisador exige uma ”descontextualização” do objeto real para uma classificação de objetos independente de uma circunstância particular; uma ”despersonalização” e uma ”destemporalização”, ou seja, uma transformação das ações do mundo real para assim relacioná-las com as operações (BALACHEFF, 2000, p. 144).

Para Gazire (2000), a sistematização somente acontece quando a mente humana está de posse de muitos dados empíricos e não mais aceita que ”basta ver para crer” **??**GAZIRE, 2000, p. 191). Nos demais argumentos analisados, percebemos que, embora os alunos também não tenham conseguido alcançar um nível de prova conceitual mais elevado, os mesmos buscaram construir suas conclusões com base na experiência que tinham a respeito do assunto.

Na última etapa do experimento apresentamos aos alunos uma proposta de atividade de ”análise da excentricidade de elipses e hipérboles” (atividade 05 do caderno de atividades de Geometria Analítica).

9 Atividade 03

Plote as equações das elipses : faça uma análise de suas excentricidades e justifique sua resposta. Em seguida, em outro sistemas de coordenadas plote as equações das hipérboles: varie o parâmetro c em cada equação com a constante, faça uma análise da excentricidade e justifique sua resposta. (Adaptado da atividade 05 ”Caderno de Atividades de Geometria Analítica”, Miranda e Laudares, 2011, p. [11][12].

O objetivo dessa etapa era investigar a habilidade de uma demonstração matemática com base na interpretação geométrica do conceito de excentricidade. Esperávamos que os alunos fossem capazes consolidar formalmente uma definição. Evidentemente, esse não é um trabalho simples, pois exige do aluno um compromisso com a resolução do problema não só na sua eficácia prática, mas também com seu rigor teórico.

Assim, buscamos inicialmente, analisar nos argumentos construídos características que estabelecessem relações entre a comunicação dos significados compartilhados e a linguagem operacional raciocínios apresentados evidenciaram uma boa compreensão do conceito de excentricidade.

Notamos, que ao analisarem o comportamento das elipses no plano, os alunos conseguiram reconhecer a equação como uma circunferência e relacionar essa característica ao fato de sua excentricidade ser nula. Porém, na tentativa de justificar a afirmação feita, de acordo com Nasser e Tinoco (2003), eles recorreram a um argumento de Autoridade: ”alguns autores consideram a circunferência como sendo uma elipse de excentricidade nula” (justificativa apresentada por um grupo de alunos).

Mais uma vez, esse fato nos remete à ideia defendida por Gazire (2000) de que o processo mais usado pelo ser humano em sua própria aprendizagem é a ”imitação”. Para a pesquisadora, os alunos estão acostumados a um tipo de ensino em que os conteúdos são apresentados pelo ”livro-texto” e a eles ”cabe apenas decorar fórmulas e algoritmos para então aplicá-los em exercícios padronizados” (GAZIRE, 2000, p. 179-180).

Daí resulta a falta de compreensão dos alunos, como pudemos observar nos demais argumentos construídos, de que a demonstração de uma verdade geométrica não depende apenas de apresentar um aspecto particular ou circunstancial de uma determinada figura e sim, que é necessário separar do desenho dado as propriedades gerais e permanentes daquelas particularidades.

Nessa perspectiva, de acordo com Balacheff (1988), para que o aluno chegue a um nível de ”prova conceitual”, existe um longo caminho, que deve inicialmente passar por uma mudança radical na forma de conceber a prova: ”é necessário que a justificativa que constitui a base da validação da proposição apoiese sobre a análise de suas propriedades e essas não devem mais ser formuladas de maneira particular, mas sim de forma generalizada” **??**BALACHEFF, 1988, p. 227).

Quando analisamos os argumentos construídos em relação à excentricidade das hipérboles, notamos que em apenas um dos casos, ocorreu uma tentativa de se apresentar uma prova mais conceitual. Observamos no argumento construído que as alunas buscaram explicitar a justificativa apresentada de forma mais generalizada, embora a conclusão inferida tenha partido de um caso particular. Balacheff (1988) classifica esse tipo de argumento como um nível de prova denominado de ”Exemplo Genérico”. Para o pesquisador as tentativas de alguns alunos em estabelecer uma prova matemática por meios de uma argumentação lógica esbarra na dificuldade de proporcionar ao problema apresentado uma configuração mais especifica: ”a prática da prova exige raciocínio e ao mesmo tempo um estado específico de conhecimento” **??**BALACHEFF, 1988, p. 228).

Nos demais casos analisados, percebemos novamente, que os argumentos foram construídos de forma bastante rudimentar, apresentando um nível de prova classificado de acordo com Balacheff (1988), como "Empirismo Ingênuo". Nesses argumentos, as características das expressões linguísticas são insuficientes para tornar claro o nível de compreensão matemática envolvido na construção do raciocínio. Entendemos que os argumentos aqui apresentados fazem parte de uma concepção mental dos alunos que os impede de expressar claramente as propriedades de um determinado objeto e suas consequências o que implica na impossibilidade de construir linguagens conceituais mais avançadas.

IV.

10 Considerações Finais

O que se observa, é que de maneira geral, os discentes dessa turma estão passando por um processo de transição que constitui sua identidade profissional. Percebemos que muitos alunos ao chegarem à Universidade não estão conscientes ou convencidos que o objetivo principal desse curso é a formação de professores, e que seu papel social de educador é ter uma visão ampla de que a aprendizagem matemática deve oferecer à formação dos indivíduos a competência para o exercício de sua cidadania.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ e } \frac{x^2}{b^2} - (y - k)^2 = 1$$

Figure 1: Fonte:

2 $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ e } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Figure 2: Figura 2 :

III. Construindo o Conceito de Cônicas

a) Experimento -Construção de Cônicas com o GEOGEBRA

? Situação Proposta: Com base no comportamento das cônicas construídas com o auxílio do GEOGEBRA encontre um modelo matemático que represente cada situação observada.

Figure 3:

[Nasser et al. ()] *Argumentação e provas no ensino de matemática. Rio de Janeiro: Ufrj/projeto Fundão*, Lilian ; Nasser , Lucia A Tinoco , De . 2003. 109.

[Balacheff ()] 'Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics'. Nicolas Balacheff . *En: PIMM, David. Mathematics, teachers and children*, (Londres) 1988. Hodder & Stoughton. p. .

[Miranda et al. ()] *Caderno de atividades de geometria analítica: aulas práticas no laboratório de computação: uso dos softwares Geogebra e Winplot (Caderno 05)*, Dimas Miranda , ; Felipe De , João Laudares , Bosco . 2011. Belo Horizonte: FUMARC.

[CÃ?"NICAS, noções: intuições e aplicações (2016)] `<http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/04/conicas-nocoes-intuitivas-e-aplicacoes.html>Acessoem` *CÃ?"NICAS, noções: intuições e aplicações*, 2016. 18 mar. 2016.

[Hanna ()] *Educational studies in mathematics, Canadá, v. 44, n. 1*, Gila Hanna . 2000. p. . (Proof, explanation and exploration: an overview)

[______________ and Viggiani] *Filosofia da educação matemática: fenomenologia, 7. BRASIL. Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática*, Maria Aparecida ______________, Viggiani . `ParecerCES/CNE1.302/2001` Org.. p. 13. (homologação publicada no DOU 05/03/2002, Seção 1, p. 15. Resolução CES/CNE 03/2003, publicada no DOU 25/02/2003, Seção 1)

[Gazire and Scheid ()] *O não resgate das geometrias. 2000. 217 f. Tese (Doutorado) -Curso de Doutorado*, Eliane Gazire , Scheid . 2000. Campinas. Universidade Estadual de Campinas

[Bicudo and Viggiani (ed.) ()] *Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas*, Maria Aparecida Bicudo , Viggiani . BICUDO, M. A. V. (ed.) 1999. Org.; São Paulo: UNESP. (Filosofia e epistemologia na educação matemática)

[Fiorentini ()] 'Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, Marcelo de Carvalho. Pesquisa qualitativa em educação matemática'. Dario Fiorentini . *Autêntica* 2004. p. .

[Aguilar Júnior and Augusto ()] *Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova apresentados por alunos do ensino fundamental. 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado) -Mestrado em Ensino de Matemática*, Carlos Aguilar Júnior , Augusto . 2012. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro

[__________________ ()] 'Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas'. Nicolas __________________. *Tradução: Pedro Gómes. Bogotá: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A* 2000.

[_____________________ ()] 'Processus de preuve et situations de validation'. Nicolas _____________________. *Educational Studies In Mathematics: An International Journal. v* 1987. 2 p. .

[Hanna ()] *Some pedagogical aspects of proof. Interchange. The Ontario Institute or Studies in Education*, Gila Hanna . 1990. Ontario, Canadá. p. .